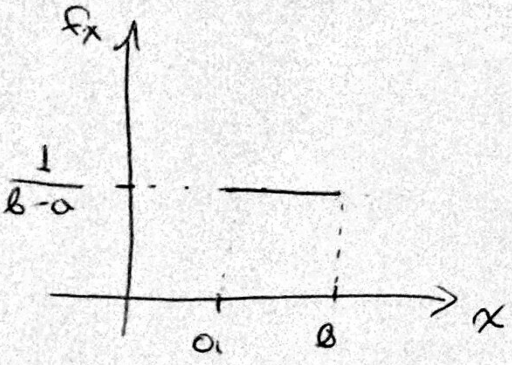
Ομοιόμορφη Κατανομή

$$X \sim U(\alpha, \beta) \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} &, \alpha < x < \beta \\ 0 &, \text{αλλού} \end{cases}$$



Αν μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές στο (α, β) και όλα τα υποδιαστήματα ίσου μήκους του (α, β) έχουν την ίδια πιθανότητα $\Rightarrow X \sim U(\alpha, \beta)$ *

Παράδειγμα

Λεωφορεία φτάνουν σε μια στάση κάθε 15' με το πρώτο να φτάνει στην στάση στις 8 το πρωί. Επιβάτης φτάνει στην στάση κάποια χρονική στιγμή στο διάστημα (8:00, 8:30)

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες

α) Ο επιβάτης να περιμένει λιγότερο από 5 λεπτά

β) -//- περισσότερο από 10 λεπτά

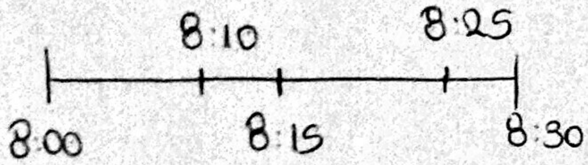
Λύση

Έστω X παριστά την χρονική στιγμή που ο επιβάτης φτάνει στην στάση

Τιμές του X : $x \in (8{:}00,\ 8{:}30)$

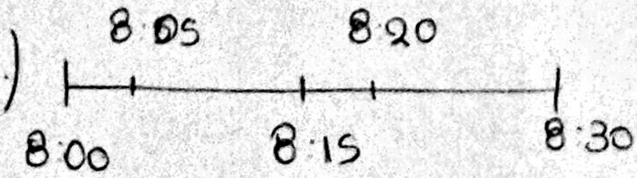
Για το πρόβλημα αυτό μπορώ να δεχτώ ότι η X ικανοποιεί την *

Άρα $X \sim U(8{:}00,\ 8{:}30)$ $\qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & 8{:}00 < x < 8{:}30 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

α) 

$P(8{:}10 \leq X \leq 8{:}15 \text{ ή } 8{:}25 \leq X \leq 8{:}30) = P(8{:}00 \leq X \leq 8{:}15) + P(8{:}25 \leq X \leq 8{:}30)$

$= \int_{8:10}^{8:15} \frac{1}{30}\,dx + \int_{8:25}^{8:30} \frac{1}{30}\,dx = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

β) 

$P(8{:}00 \leq X \leq 8{:}05 \text{ ή } 8{:}00 \leq X \leq 8{:}20) = P(8{:}00 \leq X \leq 8{:}05) + P(8{:}00 \leq X \leq 8{:}20)$

$= \int_{8:00}^{8:05} \frac{1}{30}\,dx + \int_{8:15}^{8:20} \frac{1}{30}\,dx = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Παράδειγμα

Ένα σπίτι εκλέγεται στην τύχη πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους l. Να υπολογιστεί η πιθανότητα το πηλίκο του μικρότερου προς το μεγαλύτερο τμήμα το οποίο χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα είναι μικρότερο από $\frac{1}{4}$ $\left(=\frac{2}{5}\right)$

Εκθετική Κατανομή

Στηρίζεται στην διαδικασία Poisson.

Για την διαδικασία της Poisson κατανομής ενδιαφερθήκαμε για το πλήθος των αφίξεων στο διάστημα $(0,t)$ και αποδείξαμε ότι αν $N(t)$ είναι το πλήθος των αφίξεων στο $(0,t)$ τότε

$N(t) \sim P(\lambda t)$ και έχει σ.π $P(N(t)=z) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^z}{z!}$ $z=0,1,2,\ldots$ $*$

Έστω τώρα ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο X μεταξύ δύο οποιονδήποτε διαδοχικών αφίξεων σε μια διαδικασία Poisson (π.χ χρόνος μεταξύ διαδοχικών σεισμών, διαδοχικών πολέμων, διαδοχικών πελατών κτλ)

Τότε ο χρόνος X είναι τ.μ. με τιμές $x \geq 0$

Αρκεί να βρω την σ.π.π ή την α.σ.κ

Προτιμάμε συνήθως την α.σ.κ γιατί μπορεί να είμαι σε θέση να προσδιορίσω πιθανότητες $\{X \leq x\}$ ή $\{X > x\}$

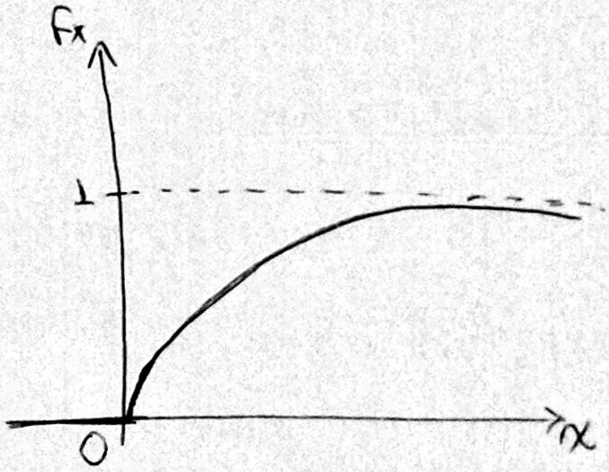
$$P(X>x) = P\begin{pmatrix}\text{καμία άφιξη}\\ \text{σε χρόνο } x\end{pmatrix} = P(N(x)=0) \overset{*}{=} e^{-\lambda x} \quad , x>0$$

$F_X(x) \overset{o\rho}{=} P(X \le x) = 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$

Αν επεκτείνω τον ορισμό της F_X στο $\mathbb{R}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Η F_X είναι α.σ.κ γιατί



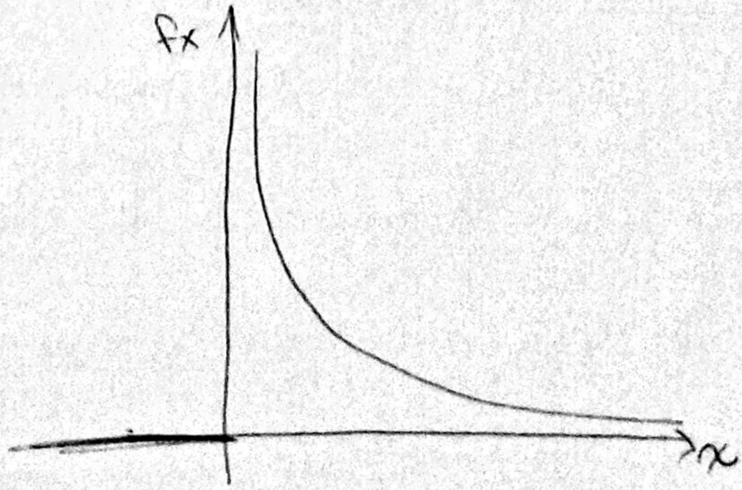
α) είναι αύξουσα

β) είναι συνεχής παντού

γ) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Εύρεση σ.π.π

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$$



Είναι η f σ.π.π? ΝΑΙ

1) $f_X(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

ΟΡΙΣΜΟΣ

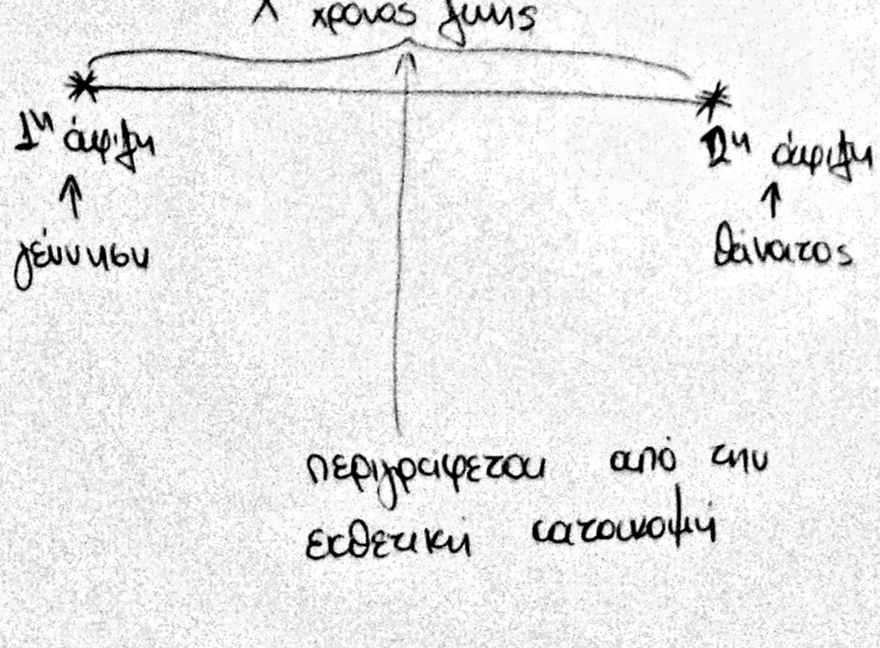
Μια τ.μ. X λέγεται εκθετική με παράμετρο $\lambda>0$ αν οι τιμές της X είναι $x \geq 0$ και η σ.π.π της X είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

Συμβολισμός $X \sim \text{Εκθ}(\lambda)$

Η εκθετική εφαρμόζεται σε κάθε πρόβλημα που μοντελοποιείται με την διαδικασία Poisson και μας ενδιαφέρει ο χρόνος μεταξύ δύο αφίξεων

Εξιδανικευμένα



Η εκθετική κατανομή είναι γνωστή και ως κατανομή χρόνου ζωής.